WISKUNDE VI, cursus '91–'92, Tentamen

Donderdag, 26 november 1992, duur: drie uur.

1.[1] De onderdelen (i) en (ii) zijn onafhankelijk van elkaar. Geef in de uitwerkingen aan wanneer het maximum modulus principe, de stelling van Liouville en de identiteitsstelling toegepast worden.

(i)[5] De funktie $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$ is analytisch en heeft de volgende eigenschappen:

(1) f heeft in $z = 0$ een enkelvoudige pool met residu 2π.

(2) f heeft in $z = 1$ een ophefbare singulariteit en er geldt $\lim_{z \to 1} f(z) = \pi$.

(3) $\lim_{z \to \infty} \left| f(z) - \dfrac{\sin \pi z}{z - 1} \right| = 0$.

Bewijs: $f(z) = \dfrac{2\pi}{z} + \dfrac{\sin \pi z}{z - 1}$.

(ii) De funktie $g(z)$ is analytisch op $|z| < 3$ en $|g(z)| \leq 1$ op $|z| = 2$.

(a)[2] Bewijs: $|g(z) - g(0)| \leq |z|$ op $|z| \leq 2$.

(b)[2] Bewijs: $g'(0) = 1 \Rightarrow g(z) = g(0) + z$ voor alle z met $|z| < 3$.

2.[1] De onderdelen (i) en (ii) zijn onafhankelijk van elkaar.

(i)[3] Bepaal het residu van de funktie

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z}$$

in het punt $z = 0$.

(ii)[6] Bepaal de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{(x-1)(x-2)}\, dx$$

via berekening van de hoofdwaarde–integraal PV $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z-2)}\, dz$.

3.[1] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$(*) \qquad (1 - z^2)w''(z) - 2zw'(z) - \frac{1}{4}w(z) = 0.$$

(i)[2] Toon aan dat $(*)$ een Riemann differentiaalvergelijking is en bepaal het bijbehorend P–symbool.

(ii)[2] Bewijs dat ${}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{z+1}{2})$ een oplossing is van $(*)$.

(iii)[3] Bewijs dat $(z-1)^{-\frac{1}{2}}\, {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{1-z})$ een oplossing is van $(*)$.

(Z.O.Z.)